

**ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ЗАЦЕПЛЕНИЯ
ВЫСОКОНАГРУЖЕННЫХ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ В УСЛОВИЯХ АБРАЗИВНОГО
ИЗНАШИВАНИЯ**

© 2026 Попов А. М., Плотников К. Б., Мехдиев Р. В., Майтаков А. Л. ✉, Ветрова Н. Т.

*Кемеровский государственный университет
(г. Кемерово, Российская Федерация)
✉ may585417@mail.ru*

Реферат. Деталими, лимитирующими долговечность зубчатых передач, трансмиссий сельскохозяйственной техники являются шестерни, подверженные интенсивному абразивному изнашиванию так как их эксплуатация происходит в условиях высокой запылённости воздуха из-за недостаточной герметичности внутренних полостей. Цель исследований – изучение и анализ изменений характеристик зацеплений и их влияние на кинематику высоконагруженных зубчатых передач в условиях абразивного изнашивания. Исследования проводились с помощью метода слепков для фиксации относительного положения профилей. Одновременно проводилось тензометрирование для установления начала и конца зацепления пары зубьев и установления коэффициента перекрытия. Углы поворота фиксировались оптическими делительными головками. Испытывались прямозубые передачи с модулями $m=2-5$ мм без смещения исходного контура (термообработка - нормализация и объёмная закалка HRC38-400; числа зубьев шестерни $z_1=12-30$, $z_2=22-90$. Материал шестерни - сталь 40X, колеса – сталь 45. Установлено, что при абразивном изнашивании высоконагруженных передач форма профиля зубьев изменяется, главным образом, в начальный период износа при его величине 5-8%. Размах колебаний при изнашивании возрастает, особенно в начальный период. По мере увеличения износа рост размаха колебаний замедляется и при износе зубьев шестерни свыше 12-16% размах стабилизируется. Рост размаха колебаний с увеличением модуля e возрастает. Колебания при изнашивании могут достигать значительной величины: при износе 16% и более при малом числе зубьев шестерни увеличение размаха достигало 130%. Установлено, что линия зацепления при изнашивании искривляется. Начало и конец зацепления сдвигаются по ходу вращения зубчатых колес. Коэффициент перекрытия по мере износа уменьшается и при износе свыше 10-14% стабилизируется в пределах 1,03-1,1. Создана математическая модель функции передаточного отношения в зависимости от величины износа.

Ключевые слова: зубчатые передачи, износ, вибрация, сельскохозяйственные машины, тензометрический способ.

Для цитирования: Исследование изменения характеристик зацепления высоконагруженных зубчатых передач в условиях абразивного изнашивания / А.М. Попов, К.Б. Плотников, Р.В. Мехдиев и др. // Вестник Казанского государственного аграрного университета. 2026. Т. 21. № 1(81). С. 89-98. doi: 10.31588/2073-0462-2026-21-1-89-98

**INVESTIGATION OF CHANGES IN THE GEARING CHARACTERISTICS OF HIGHLY
LOADED DRIVES IN CONDITIONS OF ABRASIVE WEAR**

© 2026 Popov A. M., Plotnikov K. B., Mekhdiiev R. V., Maytakov A. L. ✉, Vetrova N. T.

*Kemerovo State University
(Kemerovo, Russian Federation)
✉ may585417@mail.ru*

Abstract. Gears, which are subject to intense abrasive wear due to their operation in dusty environments due to insufficient sealing of internal cavities, limit the service life of gear drives and transmissions in agricultural machinery. The aim of this study was to investigate and analyze changes in engagement characteristics and their impact on the kinematics of heavily loaded gear drives in conditions of abrasive wear. The study was conducted using a casting method to record the relative positions of profiles. Simultaneously, strain gauge measurements were performed to determine the start and end of engagement of a pair of teeth and to establish the overlap coefficient. Rotation angles were recorded using optical dividing heads. Spur gears with modules $m=2-5$ mm were tested without shifting the original contour (heat treatment - normalization and bulk hardening HRC38-400; the number of gear teeth $z_1=12-30$, $z_2=22-90$. Gear material - steel 40X, wheel - steel 45. It was found that during abrasive wear of highly loaded gears, the shape of the tooth profile changes mainly in the initial period of wear when its value is 5-8%. The amplitude of oscillations during wear increases, especially in the initial period. As wear increases, the increase in the amplitude of oscillations slows down and when the wear of gear teeth is over 12-16%, the amplitude stabilizes. The increase in amplitude of oscillations with an increase in modulus e increases. Oscillations during wear can reach a significant value: at wear of 16% or more

with a small number of gear teeth, the increase in amplitude reached 130%. It was found that the engagement line of the gear becomes distorted with wear. The start and end points of engagement shift along the direction of rotation of the gears. The overlap ratio decreases with wear and, at wear levels exceeding 10-14%, stabilizes within the range of 1.03-1.1. A mathematical model of the gear ratio function depending on the degree of wear has been developed.

Key words: gears, wear, vibration, agricultural machinery, strain gauge method.

For citation: Popov AM, Plotnikov KB, Mekhdiy RV, et al. [Investigation of changes in the gearing characteristics of highly loaded drives in conditions of abrasive wear]. Vestnik of Kazan State Agrarian University. 2026; Vol. 21. 1(81). 89-98 p. doi: 10.31588/2073-0462-2026-21-1-89-98

Введение. Современный агропромышленный комплекс характеризуется широким применением машин, механизмов, агротехнических комплексов, позволяющих в значительной степени повысить степень механизации и автоматизации производства, и как следствие, производительность сельскохозяйственного производства. При их эксплуатации интенсивному износу подвергаются зубчатые колеса коробок перемены передач (КПП), раздаточных механизмов, бортовых редукторов и т.п. [1, 2]. Например, по данным ремонтного предприятия сельхозтехники «ДорАвтоСервис» (г. Кемерово) у колес КПП тракторов МТЗ зафиксированные износы по толщине зубьев составляют у шестерни $z=27$ МТЗ-1025 – 0,43 мм, а у колес цилиндрической передачи редукторов для комбайнов «Акрос-580 ($z=26$, $m=5$ мм) – 0,75-1,2 мм.

Абразивный износ является основной причиной выхода из строя передач сельскохозяйственных, подъемно-транспортных и горных машин. К таким передачам относятся, прежде всего, открытые передачи, а также закрытые, но недостаточно защищенные от загрязнения абразивными частицами (пыль, продукты износа) [3]. У изношенной передачи увеличиваются зазоры в зацеплении, возникают вибрации, возрастают динамические нагрузки, шумы, сокращается долговечность приводов [4]. Снижается прочность изношенного зуба вследствие уменьшения площади его поперечного сечения. Все это может привести к поломке зубьев [1, 5]. Расчет на износ затруднен тем, что интенсивность износа зависит от многих случайных факторов, в первую очередь от интенсивности загрязнения смазки. На практике при расчете передач, у которых наблюдается износ зубьев, понижают допускаемые контактные напряжения до значений, установленных на основе опыта эксплуатации подобных конструкций [6]. Как показывают исследования академика Крагельского [3] скорость изнашивания двух подвижных кинематических пар зависит от твердости и кривизны сопрягаемых поверхностей, размера и прочности абразивных частиц, а также от скорости скольжения. Наиболее рациональным способом повышения ресурса зубчатых передач коробок скоростей тракторов и редукторов является уменьшение скорости изнашивания зубьев колес. Такого эффекта можно добиться оптимизацией эксплуатационных, технологических и конструктивных параметров. Что касается прогнозирования остаточного ресурса

таких сопряжений, то в них из-за износа зубьев изменяющимся параметром являются как раз приведённый радиус кривизны и скорость скольжения.

Создание расчетных методов прогнозирования и способов повышения долговечности узлов трения представляется весьма актуальной задачей, тем более что здесь практически отсутствуют справочные рекомендации. В общем случае ресурс узлов трения по износу по Крагельскому [3, 7] определяется из соотношения (1):

$$T = [h]/V_1 \quad (1)$$

где $[h]$ – допустимый износ поверхностей, V_1 – скорость изнашивания мкм/час.

Скорость изнашивания согласно [3] определяется из зависимости:

$$V_1 = 576 \frac{\varepsilon^2 \cdot \beta^{0.5} \cdot \sigma^{2.5}}{HB_1^{1.5} \cdot HB_2 \cdot \delta_1} \sqrt{\rho_{пр}} \cdot \eta_1 \cdot n_1 \quad (2)$$

где V_1 – скорость изнашивания зубьев шестерни и колеса по диаметру начальной окружности, мкм/час; σ – условное напряжение сжатия абразивной частицы, кг/мм²; β – средний объёмный радиус частицы, мм; ε – объёмная концентрация абразивных частиц, %; δ_1 – относительная удлинение при разрыве материала зубьев, %; HB_1 , HB_2 – твёрдость зубьев шестерни и колеса по Брунеллю, кг/мм²; n_1 , n_2 – частота вращения шестерни и колес, об/с; η_1 – удельное скольжение на шестерне; $\rho_{пр}$ – приведённый радиус кривизны зубьев.

Диагностика зубчатых передач в течение всего периода их эксплуатации имеет большое значение, как на стадии их технического обслуживания и ремонта, с целью оценки ресурса их дальнейшей работы, так и для практики проектирования зубчатых зацеплений [6, 7]. Существующие методики определения интенсивности изнашивания либо совсем не учитывают изменения параметров зацепления при изнашивании [1, 8, 9], либо учитывают их при постоянстве функции передаточного отношения в процессе изнашивания, либо с учетом всех этих параметров, но при малой величине износа [10]. Уточнение изменения их в процессе изнашивания позволит с большей точностью прогнозировать ресурс и совершенствовать методы диагностики передач сельхозмашин, что напрямую влияет на снижение эксплуатационных затрат.

Цель исследований – изучение и анализ

изменений характеристик зацеплений и их влияние на кинематику высоконагруженных зубчатых передач в условиях абразивного изнашивания.

Условия, материалы и методы. Решение данной задачи включало не только установление величины износа, но и исследование изменения формы профиля зуба и связанных с ней геометрических параметров зацепления в процессе изнашивания. Поэтому на каждом этапе износа требовалось фиксировать форму изношенного профиля. Следовательно, в нашем случае требовалось измерение линейного (а не интегрального) износа зубьев в различных их сечениях [4]. Кроме того, необходимо было зафиксировать для построения линии зацепления положение точки контакта профилей в их взаимном расположении поэтапно за период зацепления пары зубьев.

Как показывают работы ряда авторов при исследовании формы профиля зуба и связанных с ней геометрических параметров зацепления в процессе изнашивания, наиболее подходящим является метод слепков с последующим их увеличением. При этом методе не требуется разборки редуктора, а он обладает достаточно высокой точностью; так по данным работы [5, 9] точность замера износа зубьев этим методом составляет 0,005...0,008 мм. Слепок используется как для оценки профиля изношенного зуба, так и оценки расположения зубьев шестерни и

колеса относительно друг друга и относительно линии, соединяющей центры колес, что позволяет фиксировать положение точки контакта пары.

Для изготовления слепков был использован протакрил – пластмасса холодной полимеризации. Профили слепков фотографировались в нескольких проекциях и далее «обрабатывались» в одном масштабе использованием программного обеспечения Matlab, обработка бинарных изображений. Все профили со слепков, полученных на разных этапах износа одной и той же пары зубьев, снимались без разборки редукторов.

На профилях слепков измеряли абсолютный износ по всему профилю зуба, а также отдельно фиксировался износ по начальной окружности ΔS_{abc} . Отношение значения износа ΔS_{abc} к первоначальной толщине зуба S_w по той же окружности даёт нам величину относительного износа (3):

$$\Delta S = \frac{\Delta S_{abc}}{S_w} \cdot 100\% \quad (3)$$

Износ оценивался по изменению толщин зуба, измеренных в 10 точках профиля от ножки до головки зуба. Результаты стендовых испытаний показали (рис. 1), что на профиле зуба шестерни в процессе изнашивания образуется выемка, а на сопряженном зубе колеса – выступ. Повышенный износ наблюдался также и на головке зуба.

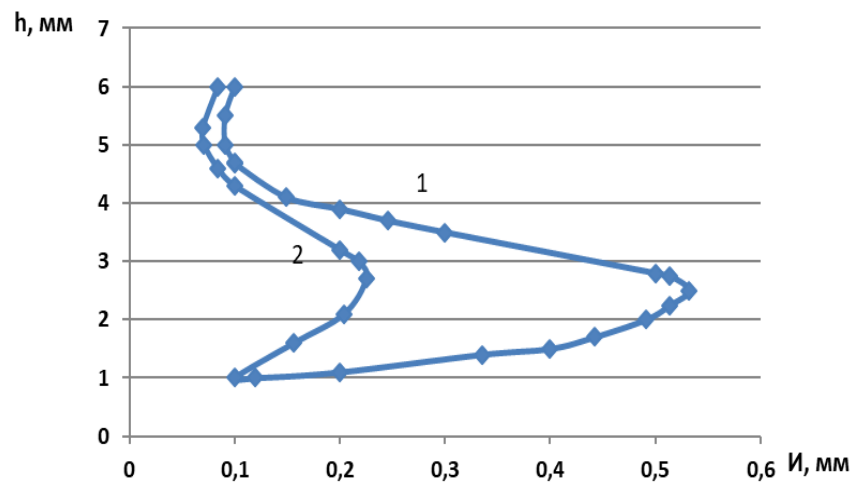


Рис. 1 – Кривые износа шестерен по профилю, ($m=4$ мм, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{18}{42}$): 1 – кривая износа шестерни; 2 – кривая износа колеса; h – высота зуба, мм; I – износ, мм

Fig. 1 – Gear wear curves along the profile ($m=4$ mm, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{18}{42}$): 1 – gear wear curve; 2 – wheel wear curve; h – tooth height, mm; I – wear, mm.

Функция передаточного отношения определяет отношение мгновенных угловых скоростей колёс в зависимости от угла ведущего колеса (4):

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} = f(\varphi_1) \quad (4)$$

Значение мгновенного передаточного

отношения, в функции передаточного отношения за период зацепления пары зубьев определялось, исходя из опытов по определению избыточных перемещения колеса, проводимых при медленном проворачивании шестерни на угол φ_1 , с фиксацией на делительных головках ОДГ10 и ОДГ60 φ_2 , нагруженных статическим

рабочим моментом, определяемым, как предельный из условия контактной прочности по ГОСТ 23.205-79. Оценка величины нагрузок на зуб, момента начала контакта и его

окончания определялся тензометрированием и визуально с видео-фиксацией. Расположение тензодатчиков 1, 2, 3 и 4 на зубе и схема измерения показаны на рис. 2.

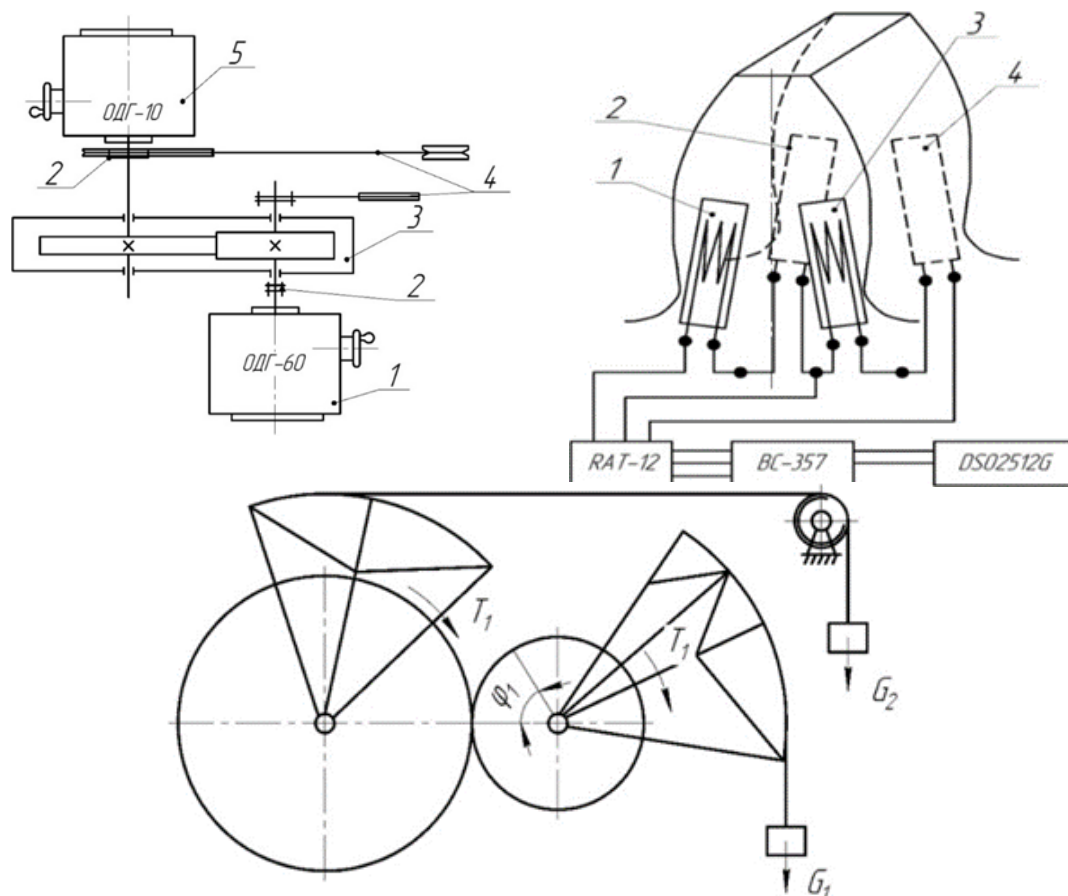


Рис. 2 – Схема наклейки тензодатчиков и установки для комплексной однопрофильной проверки зацепления: RAT-12 - токосъемник; BC-339 - тензометрический усилитель; DS02512G - шлейфовый осциллограф; 1 и 5 – оптические делительные головки;

2 - жесткая муфта, 3 – редуктор, 4 – нагрузчики с моментами T_1 и T_2

Fig. 2 – Diagram of strain gauge attachment and setup for comprehensive single-profile gear mesh testing: RAT-12 – current collector; BC-339 – strain gauge amplifier; DS02512G – strip-chart (or pen) oscilloscope; 1 and 5 – optical dividing heads; 2 – rigid coupling; 3 – gearbox (reducer); 4 – loaders with torques T_1 and T_2

Измерительная схема включает в себя: выносной полумост из тензодатчиков, установленные для повышения чувствительности с двух торцов зуба, и соединенные между собой последовательно (первый со вторым и третий с четвертым).

Были использованы тензодатчики BF100 с базой 5 мм, омическим сопротивлением $R = 100$ Ом. Датчики наклеивались на торцах зубьев ведомого колеса вблизи галтелей под углом 10° к радиусу, проведенному через середину зуба.

Для предохранения датчиков от разрушения при износе, они монтировались на расстоянии 2 - 3 мм от кромки зуба. Для определения начала и конца зацепления пары соседних зубьев и наблюдения картины распределения нагрузки за период их зацепления использовались тензодатчики. Испытания проводилась на специально сконструированной установке

(рис. 2) на разных периодах износа.

Оценка изменения кинематической точности зацепления, с одновременным замером силового взаимодействия зубьев, осуществлялась без разборки редуктора (снималась только крышка смотрового окна сверху). Установке (рис. 2) состоит из редуктора и 2-х оптических делительных головок: ОДГ-10, присоединенной к валу шестерни и ОДГ-60, присоединенной к валу колеса. Зацепление нагружается моментами T_1 и T_2 – через рычаги грузами G_1 и G_2 , обеспечивающими рабочие усилия в зацеплении. Через фиксированный угол поворота шестерни фиксируется соответствующий повороту шестерни – угол поворота колеса и соответствующее значение усилия в зацеплении, снятое с тензодатчиков (рис. 2).

Очевидно, при съеме усилий с датчиков

нельзя исключить двухпарное зацепление. Поэтому для учета этого влияния, а также для экспериментального определения коэффициента перекрытия, регистрировались одновременно напряжения с трех смежных зубьев. При тарировке легко улавливаются характерные точки пересопределения.

При этом для каждого фиксированного положения колес снимались слепки, фиксирующие взаимное положение контактирующих зубьев. фотографии слепков, увеличенные в 20 раз, позволяли с помощью не сложных построений зацепления пары зубьев, определить положение точки контакта. Последовательное построение положения точек контакта от начала зацепления до выхода зуба из зацепления дают нам, согласно теории, линию зацепления.

Выбор масла для смазки зубчатых колес при проведении испытания основывался на определении требуемой вязкости смазки в зависимости от окружной скорости и прочности материала по общепринятым данным [10]. При проведении исследований для смазки зубчатых колес использовалось масло редукторное минеральное Gazpromneft CLP-220.

Зубчатые передачи сельскохозяйственных транспортных, дорожных и других машин работают в условиях абразивной среды, и абразивный износ является преобладающим видом их разрушения. При этом, основной составной частью, определяющей абразивность среды [2, 3], является кремнезём SiO_2 . Поэтому опыты по абразивному изнашиванию

нами велись на его пыли с размером зёрен в пределах 0,08 - 0,14 мм.

Согласно литературным данным содержание частиц в смазке сельскохозяйственных и горных машин составляет не более 3-4% по массе [7], поэтому в экспериментах зубчатые колёса испытывались на смазке, содержащей 4% абразивной пыли. Через каждые 12 часов работы смазка и абразивная составляющая заменялись.

Подшипники редукторов установки были защищены от попадания в них смазки из корпуса редуктора и смазывались консистентной смазкой.

Задачей нашей работы являлась экспериментальное и аналитическое исследование влияния величины износа зубьев цилиндрических прямозубых передач различного модуля на изменение параметров зацепления при заданных критериях износа. Такими критериями являлись удельное скольжение и кривизна профилей зубьев.

Наиболее полно и наглядно данные параметры характеризуются линией зацепления и функцией передаточного отношения.

Важной характеристикой передачи является также коэффициент перекрытия. Кроме того, он позволяет дополнительно экспериментально контролировать правильность построения линии зацепления [4]. Испытания проводились на колесах разных модулей, с коэффициентом смещения исходного контура и без смещения, различной твердости (табл. 1).

Таблица 1 – Основные характеристики испытываемых колес
Table 1 — Main characteristics of the test gears

№ пары	m (мм)	z_1	z_2	x_1	x_2	Твердость зубьев шестерни	Твердость зубьев колеса	Термообработка
1	2	30	90	0	0	HB 230 - 240	HB 200 - 210	нормализация
2	2,5	24	72	0	0	HB 230 - 240	HB 200 - 210	нормализация
3	3	20	60	0	0	HB 230 - 40	HB 200 - 210	нормализация
4	4	15	45	0	0	HB 230 - 240	HB 200 - 210	нормализация
5	5	12	36	0	0	HB 230 - 240	HB 200 - 210	нормализация
6	5	12	36	+0,3	-0,3	HB 230 - 240	HB 200 - 210	нормализация
7	4	18	42	0	0	HB 230 - 240	HB 200 - 210	нормализация
8	4	18	42	0	0	HRC 45	HRC 38	объемная закалка
9	6	18	22	0	0	HRC 45	HRC 38	объемная закалка
10	6	18	22	0	0	HB 230 - 240	HB 200 - 210	нормализация
11	3	20	60	0	0	HRC 45	HRC 38	объемная закалка
12	5	12	36	+0,3	-0,3	HRC 45	HRC 38	объемная закалка
13	5	18	30	0	0	HB 230 - 240	HB 200 - 210	нормализация

Испытывались передачи, с нагрузкой предельной по условию контактной прочности, в установке замкнутым потоком мощности, с частотой $n_1=24,3 \text{ с}^{-1}$. Материал шестерни – сталь 40Х, колеса – сталь 45.

Тарировка датчиков на величину напряжений не нужна, т.к. они в статике при рабочей нагрузке, показывают только характер перераспределения нагрузки.

Все эксперименты повторялись по 5 раз. Далее проверка производилась проверка по критериям Кохрена, Стьюдента и Фишера (при критерии вероятности 95%)

Результаты и обсуждение. На рисунке 3 приведены данные, полученные в результате проведения экспериментов. Точки, приведенные на графиках – средние значения из 5 измерений (без указания доверительных интервалов).

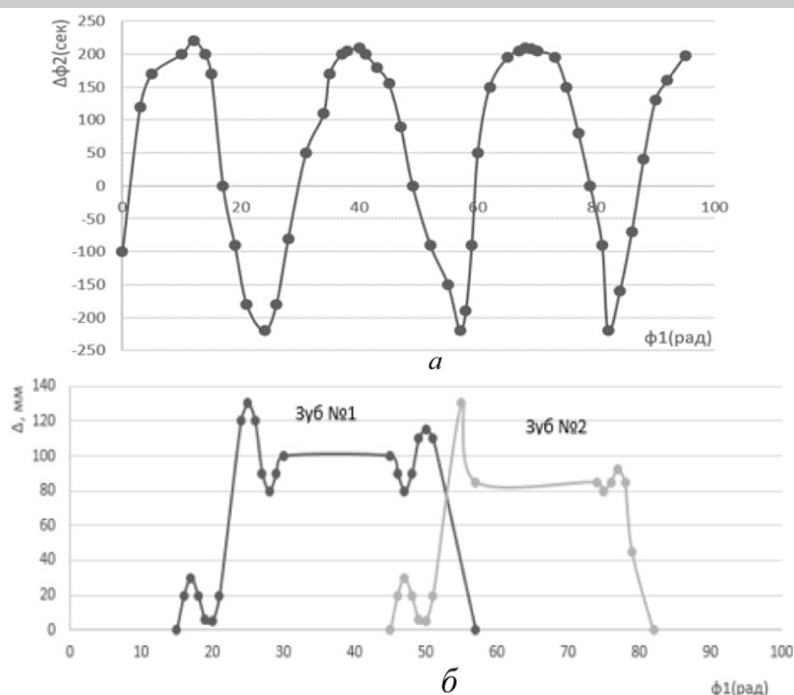


Рис. 3 – Результаты статического испытания передач с $m=5$ мм при износе $\Delta S=4\%$: а - кривые избыточных перемещений -показания с делительных головок , б - кривые нагружения соседних зубьев с рабочей нагрузкой с тензодатчиков

Fig. 3 — Results of static testing of transmissions with $m=5$ mm at wear $\Delta S=4\%$: a — excess displacement curves — readings from dividing heads; b — loading curves of adjacent teeth under working load from strain gauges

Как видно графики избыточных перемещений (циклическая погрешность) носят гармонический характер с периодом, равным

периоду зубцовой частоты. Результаты замеров для все испытываемых пар, на всех стадиях износа, приведены на рис. 4.

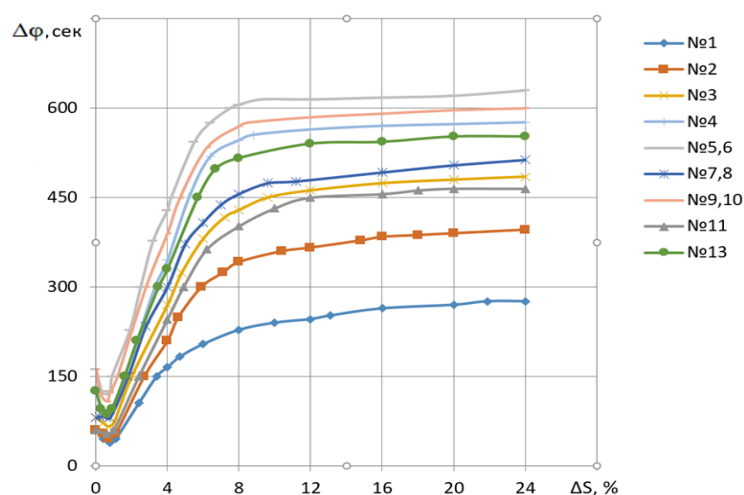


Рис. 4 – Кривые изменения избыточных перемещений зубцовой частоты при абразивном изнашивании (№ пар из табл. 1)

Fig. 4 — Curves of changes in excess displacements of the tooth frequency during abrasive wear (gear pairs No. from Table 1)

Из осциллограмм силового взаимодействия зубьев видно, что при малой (менее 1%) величине износа значение коэффициента перекрытия совпадает с расчетным значением для неизношенных зубьев, за исключением появившихся всплесков, характеризующих период входа зуба в зацепление. Из графиков нагрузки можно заключить, что в мало изношенном

зацеплении, несмотря на кажущуюся возможность приработки, усилия передаётся практически одной парой зубьев (рис. 3, $\Delta S=4\%$, б - $\phi_1=45-56^\circ$). При износе $\Delta S=8\%$ эти же характеристики будут - $\phi_1=54-56^\circ$; угол перекрытия - 2° . Анализ изменения коэффициентов перекрытия при износе для всех испытываемых пар на разных стадиях износа, по характеру

силового пересопрежения соседних зубьев показал, что для всех передач различного модуля и, соответственно, различного числа зубьев, с разным передаточным числом и с разной твёрдостью, коэффициент перекрытия при износе свыше 8-12% составляет приблизительно 1,0.

Рассмотрение графиков изменения функции передаточного отношения для всех испытываемых пар (табл. 1) показало, что уже при небольшом износе (2-3%) на линии зацепления заметно появление обратного контакта головки зуба шестерни с ножкой зуба колеса в конце линии зацепления (рис. 5), т.е. дополнительный участок контакта головки зуба шестерни и ножки зуба колеса приводит к увеличению износа. При этом изменяется в обратную сторону направление вектора скорости скольжения.

Дальнейший анализ функции передаточного отношения при изнашивании с целью получения её зависимости от величины износа и модуля удобнее вести с использованием крайних положений мгновенных полюсов на линии центров колёс (рис. 5). Расстояние от положения полюса P_0 , определяемого передаточным числом зубчатой пары, до крайнего положения мгновенного полюса при износе выше $\Delta S = 25\%$ при максимально достижимой величины износа (33%) составляет не более 0,9 модуля. Тогда для передач, выполненных без смещения исходного контура, предельное расстояние от центра шестерни до этой крайней точки, можно принять:

$$r_H = r_{w1} - 0,9m \quad (5)$$

где $r_{w1} = \frac{z_1 \cdot m}{2}$; m – модуль зацепления.

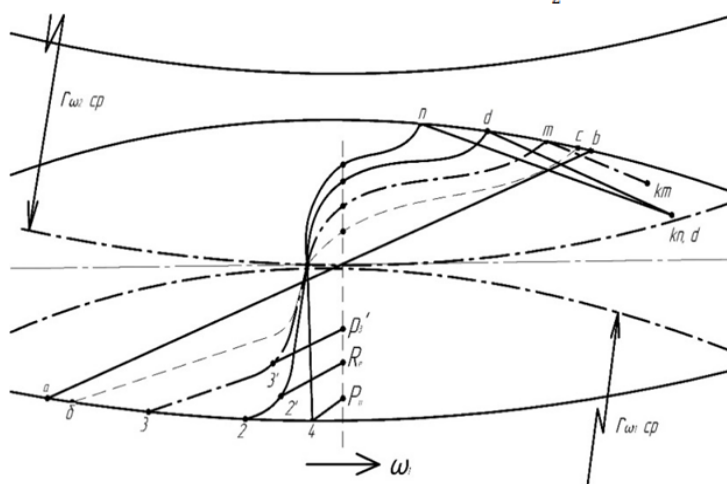


Рис. 5 - Изменение линии зацепления при изнашивании

$$(\Delta S = 0; 3; 5; 8; 25; m = 5 \text{ мм}; \frac{z_1}{z_2} = \frac{18}{30})$$

a, b, 3, 2, 4 – точки начала зацепления; kb, kc, km, kn, c – точки конца зацепления;
n, d, m, c - точки начала обратного контакта

Fig. 5 — Changes in the line of action during wear

$$(\Delta S = 0; 3; 5; 8; 25; m = 5 \text{ мм}; \frac{z_1}{z_2} = \frac{18}{30})$$

a, b, 3, 2, 4 — points of the start of engagement; kb, kc, km, kn, c —
points of the end of engagement; n, d, m, c — points of the start of reverse contact

Расстояние от P_0 до второго крайнего положения мгновенного полюса составляло не более 0,65 модуля. Следовательно, для не скорректированной передачи расстояние от этой точки до центра шестерни можно считать равным:

$$r_B = r_{w1} + 0,65m \quad (6)$$

Исходя из сказанного, определяем экстремальные значения функции передаточного отношения, используя основную теорему зацепления [1]:

$$i_{12}^{\max} = \frac{r_{w2}^{\max}}{r_{w1}^{\min}} = \frac{r_{w2} + 0,9m}{r_{w1} - 0,9m} = \frac{z_2 + 1,8}{z_1 - 1,8} \quad (7)$$

$$i_{12}^{\max} = \frac{r_{w2}^{\min}}{r_{w1}^{\max}} = \frac{r_{w2} - 0,65m}{r_{w1} + 0,65m} = \frac{z_2 - 1,3}{z_1 + 1,3} \quad (8)$$

где: $r_{w2} = 0,5mz_2$:

$r_{w1}^{\min}, r_{w1}^{\max}, r_{w2}^{\max}, r_{w2}^{\min}$ – минимальные и

максимальные значения мгновенных радиусов центров вращения шестерни и колеса.

Так как крайнее положение полюса является функцией не только модуля, но и величины износа, то в зависимостях 4 и 5 вводим коэффициент, учитывающий степень изношенности передачи $k_{\Delta S}$. Учитывая, что $k_{\Delta S}$ скажется не на r_{w1} , r_{w2} , а на расстоянии крайних положений мгновенного полюса от P_0 , уравнения 4 и 5 для разных величин износа представим в виде:

$$i_{12}^{\max} = \frac{z_2 + 1,8 \cdot k_{\Delta S}}{z_1 - 1,8 \cdot k_{\Delta S}} \quad (9)$$

$$i_{12}^{max} = \frac{z_2 - 1.3 \cdot k_{\Delta S}}{z_1 + 1.3 \cdot k_{\Delta S}} \quad (10)$$

Как показывает анализ полученных зависимостей, выражающих функцию передаточного отношения, значение степени изношенности передачи может быть выражено корреляционной зависимостью:

$$K_{\Delta S} = \frac{1.1^{\Delta S} - 1.1^{-\Delta S}}{1.1^{\Delta S} + 1.1^{-\Delta S}} \quad (11)$$

где ΔS - относительная величина износа, %.

Из графиков (рис. 4) видно, что функция передаточного отношения изношенного зацепления является периодической. Кроме того, характер кривых, выражающих функцию передаточного отношения для разных модулей и величин износа, как видим - одинаков. Поэтому единичную функцию передаточного отношения с размахом колебания равным двум, относительно среднего её значения a_0 , и представим в виде соответствующего ряда Фурье:

$$i_{12}^1 = a_0 + \sum_{n=1}^n (a_n \cdot \cos n z_1 \varphi_1 + b_n \cdot \sin n z_1 \varphi_1) \quad (12)$$

или в более удобном для использования виде:

$$i_{12}^1 = a_0 + \sum_{n=1}^n b_n \cdot \sin (n z_1 \varphi_1 + \psi_n) \quad (13)$$

где a_0 - постоянная ряда; a_n - косинусный коэффициент n -й гармоник; b_n - синусный коэффициент n -й гармоники; ψ_n - фазовый угол n -й гармоники; n - порядковый номер гармоники.

Для анализа выбирался участок длиной в один период первой гармонической составляющей, соответствующий периоду зубцовой частоты. Затем период зубцовой частоты делился на 24 равных части, соответственно применяемому 24-ординатному методу гармонического анализа. Производился гармонический анализ, с использованием стандартной программы расчета Matlab; при этом определялись значения косинусных и синусных коэффициентов.

После нахождения косинусных и синусных коэффициентов определились значения амплитуды и фазовых углов:

$$b_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (14)$$

$$\psi_n = \arctg \frac{a_n}{b_n} \quad (15)$$

Поскольку постоянная составляющая a_0 из выражения (12) зависят от модуля и конкретной величины износа, то её необходимо умножить на амплитуду колебаний функции передаточного отношения при рассматриваемом модуле и величине износа. Тогда функция передаточного отношения, для рассматриваемого модуля и данной величины износа, после преобразований может быть записана в виде:

$$i_{12} = \frac{z_2 + 1.8 \cdot k_{\Delta S}}{z_1 - 1.8 \cdot k_{\Delta S}} + \frac{z_2 - 1.3 \cdot k_{\Delta S}}{z_1 + 1.3 \cdot k_{\Delta S}} + \left[\frac{z_2 + 1.8 \cdot k_{\Delta S}}{z_1 - 1.8 \cdot k_{\Delta S}} - \frac{z_2 - 1.3 \cdot k_{\Delta S}}{z_1 + 1.3 \cdot k_{\Delta S}} \right] \frac{\Delta i_{12}}{2};$$

$$\Delta i_{12} = \sum_{n=1}^n b_n \cdot \sin (n z_1 \varphi_1 + \psi_n) \quad (16)$$

$$k_{\Delta S} = \frac{1.1^{\Delta S} - 1.1^{-\Delta S}}{1.1^{\Delta S} + 1.1^{-\Delta S}}$$

Разложение экспериментальной кривой функции передаточного отношения всех испытываемых пар показало, что можно ограничиться четырьмя гармониками, так как компоненты четвёртой гармоники составляют всего 0,5+1% от амплитуды первой гармоники.

Имея зависимости и функции передаточного отношения всех испытываемых пар, и определенные с помощью слепков, профили зубьев, можно графически построить линию зацепления (рис. 5). При этом, принимая во внимание, что в изношенных передачах центры зубчатых колёс будут некруглыми, положение мгновенных полюсов, с учётом переменности передаточного отношения, определялись из соотношения:

$$r_1 = \frac{a_\omega}{(i_{12} + 1)} \quad (17)$$

$$r_2 = \frac{a_\omega}{(i_{12} + 1)} \cdot i_{12} \quad (18)$$

где i_{12}^1 - гармоническая функция и определяется из уравнения (10)

Изменение функции передаточного отношения приводит к изменению не только кинематических параметров передач, но и динамики зацепления [4]. Возрастание же динамической составляющей нагрузки с одновременным уменьшением толщины зуба уменьшает ресурс работы передачи из условия изгибной прочности [4, 10].

Рассмотрение линий зацепления различных этапов износа (рис. 5) всех зубчатых пар показало, что по характеру они практически не отличаются друг от друга, изменяется только участок входа и выхода пары зубьев из зацепления. Последнее приводит к изменению условий контактирования пары зубьев. Амплитуда колебаний возрастает с увеличением модуля: при модуле 5 мм амплитуда на 30% больше, чем при 2 мм.

Исходя из теории зубчатых зацеплений [4, 6] изменение кривой линии зацепления и профилей контактирующих зубьев неразрывно связано с изменением приведенного радиуса кривизны зубьев, скорости относительного скольжения, и направления вектора нормального усилия зацепления за весь период зацепления пары зубьев. Это параметры, которые определяют скорость изнашивания [1, 6], контактную и изгибную прочность [5]. Знание изменения размаха колебаний при изнашивании, изгибной и контактной жёсткости зубьев позволяют на разных стадиях диагностики прогнозировать величину и изменение динамической составляющей нагрузки.

Таким образом, в отличие от методики И. В. Крагельского, определив скорость изнашивания передачи с учётом изменения геометро-кинематических параметров и предельную величину износа из условия изгибной прочности, можно вычислить остаточный ресурс работы передачи T_i в часах.

$$T_i = \frac{([\Delta S] - \Delta S_i) \cdot S_\omega}{100 \cdot j \cdot V_{iKb}} \quad (19)$$

Анализ зависимости показывает, что ресурс находится в прямой зависимости от скорости скольжения, которая является, в том числе функцией величины износа, линии зацепления и функции передаточного отношения. Проведенные расчеты для передачи с модулем $m=4$, $z_1=18$, HRC45 показали, что при расчете по методике, предложенной нами, в отличие от методики Крагельского при износах от 8% до 32% совпадение ресурса от реального - экспериментального отличалось не более чем на 14%. Экспериментально такая величина износа достигнута за $64 \cdot 10^6$ циклов, при расчетах по формуле (18) получили $64,24 \cdot 10^6$ циклов (по методике Крагельского - $72 \cdot 10^6$ циклов).

Результаты проведенных исследований дают возможность прогнозировать ресурс работы высоконагруженных передач, подверженных изнашиванию на любой стадии их диагностирования при эксплуатации и при проектировании. Это позволяет назначать межремонтные циклы, заказывать запасные колеса, сократив сроки ремонта.

Выводы. 1. При абразивном изнашивании высоконагруженных передач вместе с изменением формы профилей зубьев изменяется и закон относительного движения колёс. Функция передаточного отношения становится переменной, она носит гармонический характер

с периодом, равным зубцовой частоте. Размах колебаний при изнашивании возрастает, особенно в начальный период изнашивания. По мере увеличения износа рост размаха колебаний замедляется и при износе свыше 15 - 20% размах колебаний практически стабилизируется. Колебания при изнашивании могут достигать значительной величины (в наших опытах при износе, порядка 18% и более, при малом числе зубьев шестерни $z_1=12$ и модулем зацепления $m=5$, со смещением и без смещения исходного контура, отношение достигало 1,3).

2. Линия зацепления при изнашивании искривляется. Начало и конец зацепления сдвигаются по ходу вращения зубчатых колёс. Коэффициент перекрытия при этом по мере износа уменьшается и при износе свыше 18-20% практически стабилизируется в пределах 1,03-1,1. Уже при износе 2 - 3% в конце линии зацепления появляется участок обратного контакта зубьев, который с увеличением износа расширяется, интенсивность роста участка обратного контакта по мере изнашивания уменьшается.

3. Изменения линии зацепления при изнашивании при разных модулях, передаточных числах, твёрдости зубьев и наличия или отсутствия смещения исходного контура имеют схожий характер.

Литература

- 1 Onishchenko V. Investigation of tooth wears from scuffing of heavy duty machine spur gears. Mechanism and Machine Theory. Vol. 83. 2015. p. 38-55. doi:10.1016/j.mechmachtheory.2014.08.016.
- 2 Дубовик Е.А. Особенности изнашивания зубчатых передач трансмиссий // Трение и смазка в машинах и механизмах. 2015. № 3. С. 31-35. ISSN: 1819-2092. ID: 23307529.
- 3 Мирзаев К.К., Мустаева Б.У. Износостойкость зубчатых передач, работающих в абразивной среде // Universum: технические науки: электрон. научн. журн. 2019. № 3 (60). URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/7063> (дата обращения: 30.03.2020).
- 4 Исследования изменения динамических нагрузок при изнашивании цилиндрических зубчатых передач сельскохозяйственных машин / Попов А.М., Мехдиев Р.В., Майтаков А.Л., и др. // АПК России. 2024. т.31.с. 372-379. doi:10.55934/2587-8824-2024-31-3-372-379.
- 5 Краснов Ю.В., Никандров И.С., Горшков А.С. Оценка вероятности безотказной работы передач из-за отказов, вызванных износом, контактной и изгибной усталостью // Современные наукоемкие технологии. 2018. № 3. С. 67-72. URL: <https://top-technologies.ru/article/view?id=36938> (дата обращения: 16.01.2025).
- 6 Прохоров В. П., Тимофеев Г. А., Чернышева И. Н. Эволюция плоского эвольвентного зацепления при износе от истирания // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2015. № 2(659). С. 14-21.
- 7 Метод оценки остаточного ресурса зубчатых передач в межремонтный период / Н. Н. Ишин, А. М. Гоман, А. С. Скороходов [и др.] // Механика машин, механизмов и материалов. 2021. № 2(55). С. 5-17. doi: 10.46864/1995-0470-2021-2-55-5-17.
- 8 Калинин Д. В., Темис Ю. М. Анализ влияния сил трения в зацеплении на динамические нагрузки в зубчатых передачах // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2018. № 6(699). С. 32-43. doi: 10.18698/0536-1044-2018-6-32-43.
- 9 Zheng F., Zhang J., Yao L., Investigation on the wear of spur gears generated by modified cutter. Friction, 9 (2021) 288-300. 9(2): 288-300 (2021) ISSN 2223-7690 doi: 10.1007/s40544-019-0337-8.
10. Effects of tooth modifications on the dynamic characteristics of thin-rimmed gears under surface wear / Y. Huangfu, Z. Zhao, H. Ma, et al. // Mechanism and Machine Theory. 150 (2020) 103870.

References.

- 1 Onishchenko V. Investigation of tooth wears from scuffing of heavy duty machine spur gears. Mechanism and Machine Theory. Vol.83. 2015; 38-55 p. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2014.08.016.
- 2 Dubovik EA. [Features of wear of transmission gears]. Trenie i smazka v mashinakh i mekhanizмах. 2015; 3. 31-35 p. ISSN: 1819-2092. ID: 23307529.
- 3 Mirzaev KK, Mustaeva BU. [Wear resistance of gears operating in an abrasive environment]. Universum: tekhnicheskie nauki: elektron. nauchn. zhurn. 2019; 3 (60). [cited 2020, March 30]. Available from: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/7063>.
4. Popov AM, Mekhdiev RV, Maytakov AL. [Research of changes in dynamic loads during wear of cylindrical gear transmissions of agricultural machinery]. APK Rossii. 2024; Vol.31. 372-379 p. doi: 10.55934/2587-8824-2024-31-3-372-379.
5. Krasnov YuV, Nikandrov IS, Gorshkov AS. [Assessment of probability of failure-free operation of gears due to failures caused by wear, contact and bending fatigue]. Sovremennye naukoemkie tekhnologii. 2018; 3. 67-72 p. [cited 2025, January 16]. Available from: <https://top-technologies.ru/ru/article/view?id=36938>.

6. Prokhorov VP, Timofeev GA, Chernysheva IN. [Evolution of flat involute gearing under wear from abrasion]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroyeniye*. 2015; 2(659). 14-21 p.
7. Ishin NN, Goman AM, Skorokhodov AS. [Method for assessing the residual life of gears in the inter-repair period]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov*. 2021; 2(55). 5-17p. doi: 10.46864/1995-0470-2021-2-55-5-17.
8. Kalinin DV, Temis YuM. [Analysis of friction forces impact in the engagement on dynamic loads in gear transmissions]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroyeniye*. 2018; 6(699). 32-43 p. doi: 10.18698/0536-1044-2018-6-32-43.
9. Zheng F, Zhang J, Yao L. Investigation on the wear of spur gears generated by modified cutter. *Friction*, 9. 2021; 288-300 p. 9 (2). 288-300 p. (2021) ISSN 2223-7690 doi: 10.1007/s40544-019-0337-8.
10. Huangfu Y, Zhao Z, Ma H. Effects of tooth modifications on the dynamic characteristics of thin-rimmed gears under surface wear. *Mechanism and Machine Theory*. 150. 2020; 103870.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Сведения об авторах:

Попов Анатолий Михайлович – доктор технических наук, профессор кафедры мехатроники и автоматизации технологических систем Кемеровского государственного университета (650000, Российская Федерация, г. Кемерово, ул. Красная, д.6), e-mail: popov4116@yandex.ru, ORCID 0000-0003-0728-7211

Плотников Константин Борисович – доктор технических наук, профессор кафедры мехатроники и автоматизации технологических систем Кемеровского государственного университета (650000, Российская Федерация, г. Кемерово, ул. Красная, д.6), e-mail: k.b.plotnikov.rf@gmail.com, ORCID 0000-0003-4145-0027

Мехдиев Рауф Валех Оглы – ассистент кафедры мехатроники и автоматизации технологических систем Кемеровского государственного университета (650000, Российская Федерация, г. Кемерово, ул. Красная, д.6), e-mail: mehdiev23@mail.ru, ORCID 0009-0005-5536-5482

Майтаков Анатолий Леонидович – доктор технических наук, профессор кафедры управления качеством Кемеровского государственного университета (650000, Российская Федерация, г. Кемерово, ул. Красная, д.6), e-mail: may585417@mail.ru, ORCID 0000-0002-0714-204X

Ветрова Надежда Тolibджоновна – кандидат технических наук, доцент кафедры управления качеством Кемеровского государственного университета (650000, Российская Федерация, г. Кемерово, ул. Красная, д.6), e-mail: veteroknadi@mail.ru, ORCID 0000-0002-7131-0511

Вклад авторов:

А.М. Попов – научное руководство проектом, формулирование идеи, гипотезы и цели исследования, проверка результатов и воспроизводимости;

К.Б. Плотников – разработка методов и процедур, разработка методов и процедур, создание программного обеспечения, скриптов и алгоритмов, проверка результатов и воспроизводимости;

Р.В. Мехдиев – проведение экспериментов и сбор данных, написание первоначального текста статьи, статистический или теоретический анализ данных;

А.Л. Майтаков – разработка методов и процедур, управление данными: подготовка, аннотирование и хранение, проверка результатов и воспроизводимости, редактирование и доработка текста, организационное управление проектом;

Н.Т. Ветрова – проведение экспериментов и сбор данных, написание первоначального текста статьи, статистический или теоретический анализ данных, создание графиков, схем и иллюстраций.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Поступила 24.01.2025; одобрена после рецензирования 06.12.2025; принята к публикации 01.04.2026.

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.

Authors:

Popov Anatoliy Mikhaylovich – Doctor of Technical Sciences, Professor of Mechatronics and Automation of Technological Systems Department Kemerovo State University (6 Krasnaya Street, Kemerovo, 650000, Russian Federation), e-mail: popov4116@yandex.ru, ORCID 0000-0003-0728-7211

Plotnikov Konstantin Borisovich – Doctor of Technical Sciences, Professor of Mechatronics and Automation of Technological Systems Department Kemerovo State University (6 Krasnaya Street, Kemerovo, 650000, Russian Federation), e-mail: k.b.plotnikov.rf@gmail.com, ORCID 0000-0003-4145-0027

Mekhdiev Rauf Valekh Ogly – assistant of Mechatronics and Automation of Technological Systems Department Kemerovo State University (6 Krasnaya Street, Kemerovo, 650000, Russian Federation), e-mail: mehdiev23@mail.ru, ORCID 0009-0005-5536-5482

Maytakov Anatoliy Leonidovich – Doctor of Technical Sciences, Professor of Quality Management Department Kemerovo State University (6 Krasnaya Street, Kemerovo, 650000, Russian Federation), e-mail: may585417@mail.ru, ORCID 0000-0002-0714-204X

Vetrova Nadezhda Tolibdzhonovna – Ph.D. of Technical Sciences, Associate Professor of Quality Management Department Kemerovo State University (6 Krasnaya Street, Kemerovo, 650000, Russian Federation), e-mail: veteroknadi@mail.ru, ORCID 0000-0002-7131-0511

Contribution of the authors:

A.M. Popov — Scientific supervision of the project, Formulation of the research idea, hypothesis, and objectives, Verification of results and reproducibility;

K.B. Plotnikov — Development of methods and procedures, Development of software, scripts, and algorithms, Verification of results and reproducibility;

R.V. Mekhdiev — Conducting experiments and data collection, Drafting the initial version of the article, Statistical or theoretical data analysis;

A.L. Maytakov — Development of methods and procedures, Data management: preparation, annotation, and storage, Verification of results and reproducibility, Text editing and revision, Organizational project management;

N.T. Vetrova — Conducting experiments and data collection, Drafting the initial version of the article, Statistical or theoretical data analysis, Creation of graphs, diagrams, and illustrations.

The authors have read and approved the final manuscript.

Submitted 24.01.2025; revised 06.12.2025; accepted 01.04.2026.

