DOI 10.12737/2073-0462-2023-94-101
УДК 631.5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧЕК БИФУРКАЦИИ В ФУНКЦИОНИРОВАНИИ СИСТЕМЫ «ПОЧВА – РАСТЕНИЕ – ВОЗДУХ»

И. И. Максимов, М. Н. Калимуллин, Е. П. Алексеев, А. А. Васильев, Н. В. Максимов

Реферат. На сегодняшний день известен ряд математических моделей роста растений, разработанных отечественными и зарубежными учеными. Однако вопросы определения точек бифуркации, возникающих при функционировании системы «растение – почва – воздух» (Р – П – В) рассмотрены не достаточно. Применительно к вопросам, рассматриваемым в статье, точка бифуркации – это критическое состояние подсистемы «растение», при котором она становится неустойчивой относительно флуктуаций природно-климатических условий (засуха, заморозки, продолжительные дожди и др.) и возникает неопределённость в развитии растений (дальнейший рост или их гибель), а также интенсивный рост растений в результате проведения соответствующих технологических операции. Для контроля и оперативного управления формированием урожая сельскохозяйственных культур желательно знать бифуркационные точки, определяемые биологическим временем роста растений и чрезвычайными погодными ситуациями. Поэтому основная цель исследований – аналитическое определение точек бифуркации, наблюдаемых в процессе вегетации растений. Подсистема «растение» в точке бифуркации может находиться одновременно в двух или более состояниях. В результате анализа полученных аналитических зависимостей различных возможных состояний системы Р – П – В, предложено подразделять бифуркации на отрицательные и положительные. Получен метод определения точек бифуркации при функционировании системы Р – П – В. В природно-климатических условиях критические ситуации могут возникнуть при недостаточных приходящих субстанциях на систему Р – П – В, таких как светообеспеченность, влагообеспеченность, теплообеспеченность, пищеобеспеченность и газообеспеченность растений. В результате аналитических исследований определены точки бифуркации в системе Р – П – В, зависящие от радиационного баланса (R), формирующийся на подстилающей поверхности, склонов различной экспозиции и крутизны и коэффициентов, характеризующих свето-, влаго-, тепло-, пище- и газообеспеченность растений.

Ключевые слова: бифуркация, точки бифуркации, рост растений.

Введение. Математическому моделированию в физиологии растений посвящен ряд работ в рамках теории устойчивости и бифуркаций [1, 2, 3], теории катастроф [4, 5, 6], термодинамического подхода [7, 8], применения принципов оптимальности [9]. При этом определению точек бифуркации уделялось недостаточное внимание. Применение для этих целей бифуркации Хопфа [10] не всегда эффективно.

Чрезвычайные природно-климатические ситуации могут вызвать в подсистеме «растение» критические состояния, то есть точки бифуркации. Если подсистема «растение» находится в неустойчивом состоянии, выход из которого может сопровождаться или дальнейшей вегетацией, или гибелью, появляется возможность определить точки бифуркации по времени наступления чрезвычайных ситуаций в физиологическом росте растений. Известно [11, 12], что из точки бифуркации могут исходить несколько решений (устойчивых и неустойчивых), например: продолжительная засуха, заморозки, затяжные дожди, внесение питательных элементов и др. Следовательно, состояние подсистемы «растение» практически не отличается от состояния системы в момент начала бифуркации, то есть подсистема «растение» как бы колеблется перед выбором одного или нескольких путей эволюции (растение например, гибнет в результате действия длительной засухи или же бурно развивается при внесении питательных веществ – удобрений). Отсюда следует, что появляется возможность приравнять состояние системы (Р – П – В) до бифуркации с состоянием системы в момент ее начала с учетом коэффициента, учитывающего изменение фактора, вызвавшего бифуркацию.

Цель исследований – аналитическое определение точек бифуркации, наблюдаемых в процессе вегетации растений.

Условия, материалы и методы. В более ранних работах [13, 14, 15] для оценки функционирования системы «растение – почва – воздух» предложено использовать потенциал ξ роста растений, представляющий собой отношение мощности ΔN, затраченной на формирование единицы массы Δm растительности:

$$\xi = \frac{\Delta N}{\Delta m}, \qquad (1)$$

где ΔN – мощность (Вт), затрачиваемая на формирование единицы массы растения Δm (кг).

Мощность, затрачиваемая на формирование единицы массы растения, может быть ориентировочно определена из основ неравновесной термодинамики необратимых процессов [7, 8]:

$$I_i = \sum_{j=1}^{n} L_{ij} X_j \quad (i = 1,2,\dots,n), \qquad (2)$$

где I_i – термодинамические потоки, X_j – термодинамические силы, L_{ij} = const – феноменологические коэффициенты.

Для математического описания роста

растения можно использовать уравнение Ю. К. Росса [16]:

$$\frac{dm}{d\tau} = k_F\Phi_j - k_R R_j - V_j + \sum_{i=1}^{4}\left(A_{ij} - A_{ji}\right) + \sum_{i=1}^{4}\left(B_{ij} - B_{ji}\right) \quad (3)$$

где k_F – коэффициент пропорциональности при фотосинтезе;
k_R – коэффициент пропорциональности при дыхании растения;
Φ_j – интенсивность фотосинтеза и R_j – интенсивность дыхания j-го органа растения (j означает листья, 2 – стебли, 3 – корни, 4 – репродуктивные органы); A_{ij} и B_{ij} – скорость оттока соответственно «свежих» и «старых» ассимилятов из i-го органа в j-й орган; A_{ij}-A_{ji} и B_{ij}-B_{ji} – скорость обмена соответственно «свежих» и «старых» ассимилятов между i-м и j-м органами. Под «свежими» ассимилятами подразумевается биомасса, созданная в процессе фотосинтеза за единицу времени, под «старыми» - биомасса, созданная до этого.

Решая (2) и (3) и подставив в (1) получим ряд значений $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Пусть при некотором значении ξ_i начинается процесс бифуркации

$$\xi_{биф} = \frac{\Delta N_{биф}}{\Delta m_{биф}}. \quad (4)$$

Следовательно, потенциал роста растений:

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{\Delta N}{\Delta m} - \text{при идеальном росте} \\ \xi_{биф} = \dfrac{\Delta N_{биф}}{\Delta m_{биф}} - \text{при бифуркационном росте} \end{cases}$$

Введем обобщенный коэффициент, характеризующий рост растений в зависимости от реальных почвенно-климатических условий:

$$k = m_э \cdot n_э \cdot p_э \cdot r_э \cdot s_э, \quad (5)$$

где $m_э$– коэффициент светообеспеченности;
$n_э$– коэффициент влагообеспеченности;
$p_э$– коэффициент теплообеспеченности;
$r_э$– коэффициент пищеобеспеченности;
$s_э$– коэффициент газообеспеченности.

Потенциал роста растений с учетом коэффициентов (5) примет вид:

$$\xi = \frac{\Delta N}{\Delta m} \cdot k, \quad (6)$$

а для процессов бифуркации можно записать

$$\xi_{биф} = \frac{\Delta N}{\Delta m} \cdot k_{биф}. \quad (7)$$

На основании (6) и (7) будем иметь:

$$\begin{cases} \xi - \dfrac{\Delta N}{\Delta m} \cdot k = 0, \\ \xi_{биф} - \dfrac{\Delta N}{\Delta m} \cdot k_{биф} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Совместное решение системы (8) позволяет получить точку бифуркации

$$\xi - \frac{\Delta N}{\Delta m} \cdot k = \xi_{биф} - \frac{\Delta N}{\Delta m} \cdot k_{биф}.$$

Поскольку в момент начала бифуркации $\xi \approx \xi_{биф}$ и $\frac{\Delta N}{\Delta m} \neq 0$

то $k = k_{биф}$ (9)

или

$$m_э \cdot n_э \cdot p_э \cdot r_э \cdot s_э = m_{биф} \cdot n_{биф} \cdot p_{биф} \cdot r_{биф} \cdot s_{биф} \quad (10)$$

Из (10) можно определить:

$$\begin{cases} m_{биф} = \dfrac{m_э \cdot n_э \cdot p_э \cdot r_э \cdot s_э}{n_{биф} \cdot p_{биф} \cdot r_{биф} \cdot s_{биф}} \\ n_{биф} = \dfrac{m_э \cdot n_э \cdot p_э \cdot r_э \cdot s_э}{m_{биф} \cdot p_{биф} \cdot r_{биф} \cdot s_{биф}} \\ p_{биф} = \dfrac{m_э \cdot n_э \cdot p_э \cdot r_э \cdot s_э}{m_{биф} \cdot n_{биф} \cdot r_{биф} \cdot s_{биф}} \\ r_{биф} = \dfrac{m_э \cdot n_э \cdot p_э \cdot r_э \cdot s_э}{m_{биф} \cdot n_{биф} \cdot p_{биф} \cdot s_{биф}} \\ s_{биф} = \dfrac{m_э \cdot n_э \cdot p_э \cdot r_э \cdot s_э}{m_{биф} \cdot n_{биф} \cdot p_{биф} \cdot r_{биф}} \end{cases} \quad (11)$$

Для определения точки бифуркации можно предположить, что состояние системы Р – П – В в период вегетации растении практически не отличается от состояния системы в момент начала бифуркации.

Поэтому с некоторым приближением можно принять, что в соотношениях (11) величины $m_э \approx m_{биф}$, $n_э \approx n_{биф}$, $p_э \approx p_{биф}$, $r_э \approx r_{биф}$, $s_э = s_{биф}$.

Приведем формулы для определения коэффициентов.

Коэффициент светообеспеченности ($m_э$). Радиационный баланс R, формирующийся на подстилающей поверхности, состоит из части $R^{(n)}$, достигающей поверхности почвы, и остатка $R^{(н)}$, формирующегося на верхней границе *H* растений, зависящие также от экспозиции и крутизны склона [17].

Исходя из того, что склоны, расположенные в различных экспозициях и крутизны можно выразить обобщенным коэффициентом $m_э$, представляющий собой:

$$m_э = \frac{R^{(H_э)}}{R^{(H_э)} + R^{(n_э)}} \quad (12)$$

Для случая, когда поле находится на горизонтальной плоскости, каждый элемент $R^{(n)}$ и $R^{(н)}$ можно записать в развернутом виде:

уравнение теплового баланса на уровне поверхности почвы x=0

$$R^{(n)} = \lambda \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0} + C_p \rho k(x) \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0} + L\rho k(x) \frac{\partial q}{\partial x}\bigg|_{x=0}, \quad (13)$$

уравнение теплового баланса на высоте крон растений $X=H$

$$R = R^{(H)} + R^{(n)} = -C_p \rho k(x) \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=H-0} + C_p \rho k(x) \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=H+0} - L\rho k(x) \frac{\partial q}{\partial x}\bigg|_{x=H-0} - L\rho k(x) \frac{\partial q}{\partial x}\bigg|_{x=H+0} + R^{(n)}, \quad (14)$$

где λ – коэффициент теплопроводности почвы, Вт/(м·К);

$k(x)$ – коэффициент турбулентности, м^2/с;

C_p – теплопроводность воздуха, Дж/(кг·К);

ρ – плотность воздуха, кг/м^3;

L – скрытая теплота парообразования воды, Дж/кг;

q – удельная влажность воздуха;

$\partial T/\partial x$ – вертикальный градиент температуры воздуха;

$\partial q/\partial x$ – вертикальный градиент влажности воздуха;

H – высота растений, м;

x – обозначение, вводимое для обозначения температуры системы почва – воздух T вдоль координаты x, положительное значение имеет направление в сторону воздуха $x>0$, отрицательное значение направлено в сторону почвы.

Так как в уравнениях теплового баланса (13) и (14) коэффициенты и величины в зависимости от экспозиции и крутизны склонов будут отличаться, то в уравнении (12) целесообразно учесть обобщенный коэффициент экспозиции и крутизны склонов $k_{кэ}$:

$$m_э = k_{кэ} \frac{R^{(H)}}{R^{(H)} + R^{(n)}} \quad (15)$$

Коэффициент влагообеспеченности ($n_э$). Для определения коэффициента влагообеспеченности $n_э$ для склонов разной экспозиции и крутизны запишем выражение:

$$n_э = \frac{U_э + C_э + \Phi_э \downarrow}{W_э + O_э + \Phi_э \uparrow} \quad (16)$$

где $U_э$ – параметр, учитывающий сумму испарений влаги из почвы и с поверхности листьев растений или транспирация;

$C_э$ – склоновый сток атмосферных осадков;

$\Phi_э\downarrow$ – вертикальная фильтрация (сверху вниз);

$W_э$ – начальные влагозапасы в почве;

$O_э$ – атмосферные осадки;

$\Phi_э\uparrow$ – вертикальная фильтрация (снизу вверх).

Очевидно, если $n_э$=0, то система не обеспечена влагой, а при $n_э$=1 вся доступная влага используется системой Р-П-В.

Коэффициент теплообеспеченности ($p_э$) в системе растение – почва – воздух на склонах может быть определен по формуле:

$$p_э = \frac{(C_в \Delta T_э)_{вэ} + (C_p^p \Delta T_э)_{рэ} + (C_п \Delta T_э)_{пэ} + \lambda \frac{\Delta T_э}{\Delta x}\bigg|_{x=a}}{Q_{сэ}^H + Q_{qэ}^H}, \quad (17)$$

где $(C_в \Delta T_э)_{вэ}$ – теплоаккумуляция в слое произрастания растений, Дж/(м^2·с);

$C_в$ – объемная теплоемкость воздушного слоя между растениями, Дж/(м^3·с·К);

$\Delta T_э$ – разница температур в активном слое роста растений за период наблюдений, К/м;

C_p^p – объемная теплоемкость растительной массы, Дж/(м^3·с·К);

a – глубина корнеобитаемого слоя;

$C_п$ – объемная теплоемкость почвы корнеобитаемого слоя (0 - а), Дж/(м^3·с·К);

$\lambda \frac{\Delta T_э}{\Delta x}\bigg|_{x=a}$ – поток тепла в почву начиная с глубины x=a, Дж/(м^2·с);

λ – коэффициент теплопроводности почвы в слое (а=∞), Вт/(м·К);

$Q_{сэ}^H + Q_{qэ}^H$ – сумма радиации, включающая коротковолновый и длинноволновый диапазон, поступающие из атмосферы к верхнему уровню растений, Дж/(м^2·с).

В выражении (17) числитель представляет собой освоенную растением тепловую энергию от приходящего солнечного тепла ($Q_{сэ}^H + Q_{qэ}^H$). Поэтому изменение $p_э$ возможно в пределах от 0 до 1.

Коэффициент пищеобеспеченности ($r_г$) по профессору А. Ф. Чудновскому [18] представляет собой отношение питательных элементов, усвоенных корнями растений к общему количеству внесенных удобрений во всех видах.

$$r_г = \frac{\sum M_{(i,j,v,k,q,l)г}}{\sum M_{iг}^I + \left(\sum M_{(i,v)г}^{II} - \sum M_{kг}^{III} - \sum M_{qг}^{IV}\right) + \sum M_{lг}^V} \quad (18)$$

где $\sum M_{(i,j,v,k,q,l)г}$ – усвояемая подсистемой «растение» часть питательных элементов на горизонтально расположенном сельскохозяйственном поле;

$\sum M_{iг}^I$ – сумма начального содержания каждого элемента питания (i=1,2,3…);

$\sum M_{(j,v)г}^{II}$ – сумма питательных элементов, вносимых в почву, отличающихся по типу (j=1, 2, 3…) и форме (v=1, 2, 3…);

$\sum M_{kг}^{III}$ – сумма питательных элементов, переходящих в трудноусвояемую форму;

$\sum M_{qг}^{IV}$ – сумма всех питательных элементов, подверженных вымыванию и улетучиванию;

$\sum M_{lг}^V$ – сумма всех количеств питания, получаемых растениями через листья на горизонтально расположенном сельскохозяйственном поле.

Коэффициент пищеобеспеченности ($r_э$) на склоновых землях разной крутизны и экспозиции будет отличаться от коэффициента пищеобеспеченности горизонтальных (равнинных) участков ($r_г$) прежде всего дополнительной составляющей $M_э$, учитывающий содержание

всех элементов питания в подсистеме «растение» в результате эрозионных процессов:

$$r_э = \frac{\sum M_{(i,j,v,k,q,l)э}}{\sum M_{iэ}^{I} + \left(\sum M_{(i,v)э}^{II} - \sum M_{kэ}^{III} - \sum M_{qэ}^{IV}\right) + \sum M_{lэ}^{V} \pm \sum M_э} \quad (19)$$

где $\sum M_э$ – сумма количества питательных элементов каждого вида, содержащихся в почвах склоновых земель разной экспозиции и крутизны; отрицательный знак «-» применяется в том случае, когда возникают эрозионные процессы, в результате которых происходит смыв питательных веществ и почвы; положительный знак «+» если в результате накопления продуктов эрозии наблюдается приток питательных элементов;

$\sum M_{(i,j,v,k,q.l)э}$ – усвояемая системой часть питательных элементов;

$\sum M_{iэ}^{I}$ – сумма начального содержания каждого элемента питания (i=1,2,3…);

$\sum M_{(j,v)э}^{II}$ – сумма питательных элементов, вносимых в почву, отличающихся по типу (j=1,2,3…) и форме (v=1,2,3…);

$\sum_{Mkэ}^{III}$ – сумма питательных элементов, переходящих в трудноусвояемую форму;

$\sum M_{qэ}^{IV}$ – сумма всех питательных элементов, подверженных вымыванию и улетучиванию;

$\sum M_{lэ}^{V}$ – сумма всех количеств питания, получаемых растениями через листья на склонах различной экспозиции и крутизны.

Коэффициент газообеспеченности ($s_э$) определяется по выражению:

$$s_э = \frac{\rho_c k_э(x)\left[\left.\frac{\partial C_э}{\partial x}\right|_{x=H+0} + \left.\frac{\partial C_э}{\partial x}\right|_{x=H-0}\right]}{C_э}. \quad (20)$$

где ρ_c – плотность углекислого газа CO_2;

$k_э(x)$ – коэффициент вихревой диффузии;

$\left.\frac{\partial C_э}{\partial x}\right|_{x=H+0}$ – вертикальный градиент средней объемной концентрации углекислого газа в атмосфере на высоте растений;

$\left.\frac{\partial C_э}{\partial x}\right|_{x=H-0}$ – вертикальный градиент средней объемной концентрации углекислого газа в почве;

$C_э$ – продуцируемое количество углекислоты на уровне роста растений.

На рисунках 1-4 приведены некоторые бифуркационные ситуации, полученные в результате проведенных лабораторных опытов с семенами ячменя, ржи, пшеницы.

В процессе роста растения подвергались «искусственным» бифуркационным ситуациям по коэффициентам: светообеспеченности, влагообеспеченности, теплообеспеченности, пищеобеспеченности и газообеспеченности растений.

Следует отметить, что приведенные на рисунках 1-4 бифуркационные ситуации носят иллюстративный характер, хотя сами бифуркационные функции достаточно сложны.

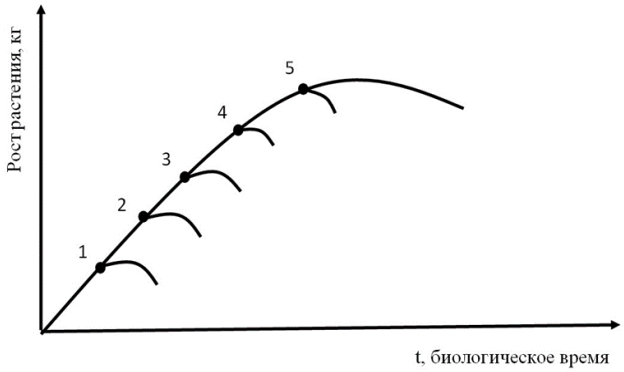

Рис. 1 – Возможные отрицательные бифуркации: 1 – при $m_{биф}$; 2 – $n_{биф}$; 3 – $p_{биф}$; 4 – $r_{биф}$; 5 – $s_{биф}$

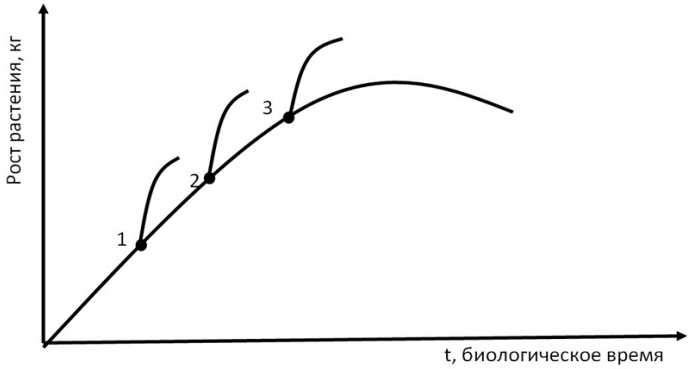

Рис. 2 – Возможные положительные бифуркации: 1 – при пищеобеспеченности; 2 – влагообеспеченности; 3 – (газообеспеченности) рыхление почвы

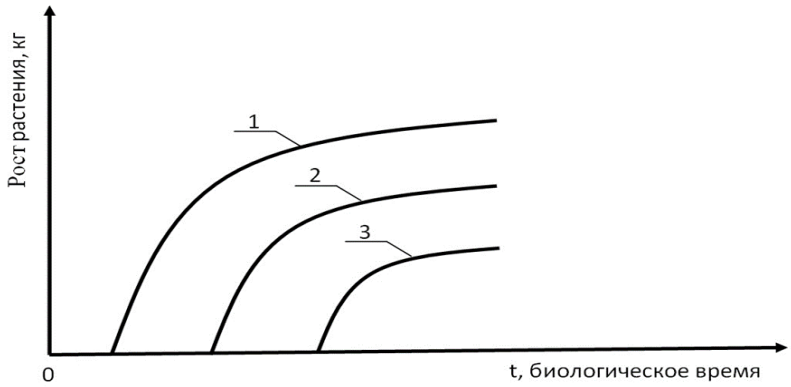

Рис. 3 – Рост растений при обработке семян: 1 – физическое и химическое воздействия; 2 – биопрепаратами; 3 – без обработки

Результаты и обсуждение. Условно бифуркации можно разделить на отрицательные и положительные. Отрицательные бифуркации (рис. 1) возникают преимущественно при неблагоприятных почвенно-климатических условиях. Многолетнее изучение урожайности зерновых культур [13] свидетельствует о резком снижении продуктивности посевов сельскохозяйственных культур в отдельные годы. Положительные бифуркации (рис. 2) возможны при проведении соответствующих технологических операций (обеспеченность элементами питания – внесение органических и минеральных удобрений; влагообеспеченность – полив или дождевание; газообеспеченность – рыхление почвы и др.) [19, 20, 21]. Повышение урожайности сельскохозяйственных культур (рис. 3) возможно при обработке семян физическими [22, 23] и химическими средствами [24, 25, 26], например, воздействием активным кислородом (оксигенация), обработка водными растворами фитогормонов и биологически активных веществ (стимуляторы роста) [27].

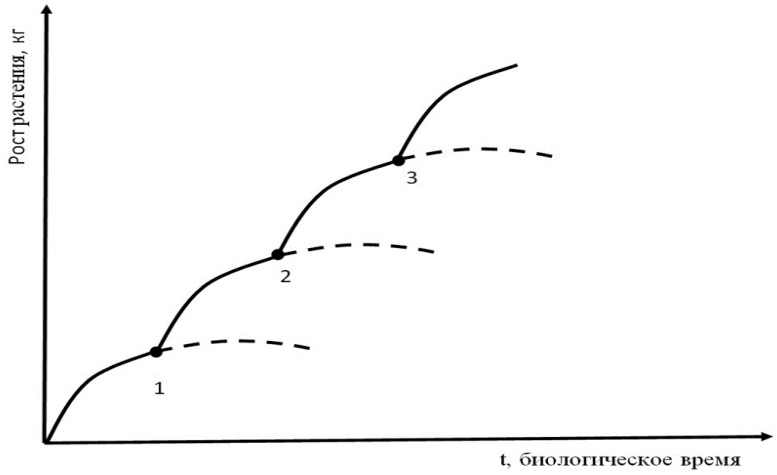

Рис. 4 – Возможный рост (бифуркационные точки 1, 2, 3) растений при питании их с учетом физиологий

Последствия таких воздействий оценивались путем проращивания семян в лабораторных условиях (в чашках Петри при температуре от 20 до 23ºС, при различной продолжительности проращивания), в посевах в закрытом и открытом грунте, и при изучении последующего развития сеянцев в экспериментальных посевах. Биологическое время появления всходов подтверждают эти эксперименты (см. рис. 3). Определенный интерес представляет бифуркационный рост растений при питании с учетом их физиологических особенностей (рис. 4).

Еще в 1946 году бельгийские ученые Prigogine I., Wiame J. M. отмечали, что многие соотношения и идеи термодинамики неравновесных процессов могут быть использованы для понимания процессов развития и роста живых организмов [7].

Впоследствии в этом направлении были развиты и применены теоретические предпосылки Prigogine I., Wiame J. M. Поэтому изучение процессов бифуркации в системе «растение – почва – воздух» с точки зрения неравновесной термодинамики представляется обоснованным.

Выводы. Полученное выражения (11) позволяют определять точки бифуркации для различных ситуаций в точное биологическое время роста растений. Бифуркацонные функции могут быть получены из выражений (15), (16), (17), (19), (20).

Литература

1. Журавлева В.В. Математические модели процессов регуляции в физиологии растений // Известия Алтайского государственного университета. 2008. № 1 (57). С. 43-57.

2. Bessonov N., Volpert V. Dynamical Models of Plant Growth. Mathematics and Mathematical modeling. // Mathematics Subject Classification. 2000. P. 63. URL: http://math.univ-lyon1.fr/~volpert/plant.pdf (дата обращения: 21.04.2023).

3. Marasco A., Giannino F. Modelling competitive interactions and plant–soil feedback in vegetation dynamics // Ricerche di Matematica. 2020. 69(1). URL: https://link.springer.com/article/10.1007/s11587-020-00497-6 (дата обращения: 21.04.2023). doi: 10.1007/s11587-020-00497-6.

4. Smithers E.T., Luo J., Dyson R.J. Mathematical principles and models of plant growth mechanics: from cell wall dynamics to tissue morphogenesis // Journal of Experimental Botany. 2019. Vol. 70. No. 14. P. 3587–3600. doi: 10.1093/jxb/erz253.

5. Mathematical Modeling of the Dynamics of Shoot-Root Interactions and Resource Partitioning in Plant Growth / C. Feller, P. Favre, A. Janka, et al. // Plos one. 2015. 10(7). URL: https://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0127905 (дата обращения: 21.04.2023). doi: 10.1371/journal.pone.0127905.

6. Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 128 с.

7. Prigogine I., Wiame J. M. Biologie et thermodynamique des phenomenes irreversibles // Experientia. 1946. Vol. 2. No. 11. P. 451-453.

8. Пригожин И., Кондепуди Д. Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур. М.: Мир, 2002. 461 с.

9. Розен Р. Принцип оптимальности в биологии. М.: Мир, 1969. 215 с.

10. Kaur D. Bifurcation induced by delay parameter in plant growth dynamics // J. Phys.: Conf. Ser. 2022. URL: https://www.iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/2267/1/012031 (дата обращения: 21.04.2023). doi: 10.1088/1742-6596/2267/1/012031

11. Модели продукционного процесса сельскохозяйственных культур / Р.А. Полуэктов, Э.И. Смоляр, В.В. Терлеев и др. // СПб.: изд-во С-Петерб. ун-та, 2006. 396 с.

12. Agrotool - a system for crop simulation / R. A. Poluektov, S. M. Fintushal, I. V. Oparina, et al. // Archives of Agronomy and Soil Science. 2002. Vol. 48(6). P. 609-635.

13. Towards a mathematical model of plant growth / I. Maksimov, A. Apaseev, V. Maksimov, et al. // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, Cheboksary. 2021. URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1755-1315/935/1/012031/pdf (дата обращения: 21.04.2023). doi: 10.1088/1755-1315/935/1/012031.

14. Функционирование системы «Растение-почва-воздух» / И.И. Максимов, В.И. Максимов, С.А. Васильев и др. // Энергосберегающие агротехнологии и техника для северного земледелия и животноводства: монография / под общей редакцией В.А. Сысуева. Киров: ООО «Кировская областная типография», 2018. С. 54-62.

15. Применение элементов Fuzzy Logic при оценке влагообеспеченности в системе растение-почва-воздух / В. В. Алексеев, И. И. Максимов, М. В. Семенов и др. // Вестник Казанского государственного аграрного университета. 2018. Т. 13. № 2(49). С. 62-66. doi: 10.12737/article_5b3504cd1487c7.23114959.

16. Росс Ю.К. К математическому описанию роста растений // Доклады Академии наук СССР. 1966. Т. 171. №2. С. 481-483.

17. Обоснование параметров контроля подстилающей поверхности агроландшафтов склоновых земель / С. А. Васильев, И. И. Максимов, А. А. Петров и др. // Вестник Казанского государственного аграрного университета. 2018. Т. 13. № 1(48). С. 108-112. doi: 10.12737/article_5afafe45b3a5e9.59496141.

18. Нерпин С.В., Чудновский А.Ф. Энерго- и массообмен в системе растение - почва - воздух. - Ленинград: Гидрометеоиздат, 1975. 358 с.

19. Изменение термических ресурсов вегетационного периода и урожайность яровой пшеницы в условиях Среднего Поволжья / А. Р. Сержанова, М. Ю. Гилязов, Ф. Ш. Шайхутдинов и др. // Вестник Казанского государственного аграрного университета. 2023. Т. 18. № 1(69). С. 38-44. doi: 10.12737/2073-0462-2023-38-44.

20. Густота посева, полевая всхожесть и структура урожая яровой пшеницы в зависимости от сорта и предпосевной обработки семян / Л. Г. Шашкаров, Г. А. Мефодьев, А. А. Балыкин и др. // Вестник Казанского государственного аграрного университета. 2019. Т. 14. № S4-1(55). С. 132-136. doi: 10.12737/2073-0462-2020-132-136.

21. Анализ погодных условий в связи с возделыванием озимой пшеницы в лесостепной зоне Зауралья / Е. А. Филиппова, Н. Ю. Банникова, Л. Т. Мальцева и др. // Вестник Казанского государственного аграрного университета. 2022. Т. 17. № 1(65). С. 32-37. doi: 10.12737/2073-0462-2022-32-37.

22. Прогнозирование влияния физических факторов на жизнеспособность микроорганизмов биопрепаратов для защиты растений / Р.Ф. Сабиров, А.Р. Валиев, Р.И. Сафин и др. // Техника и оборудование для села. 2020. № 4 (274). С. 29-33. doi: 10.33267/2072-9642-2020-4-29-32.

23. Влияние глубины посадки клубней на чистую продуктивность фотосинтеза растений картофеля / Л. Г. Шашкаров, Я. М. Григорьев, А. А. Самаркин и др. // Вестник Казанского государственного аграрного университета. 2018. Т. 13. № 1(48). С. 33. doi: 10.12737/article_5afbffb4ccf610.58065722.

24. Сабиров, Р.Ф., Валиев А.Р., Мухамадьяров Ф.Ф. Определение дисперсности распыливания рабочего раствора биопрепарата // Вестник Казанского государственного аграрного университета. 2022. Т. 17. № 1 (65). С. 77-82. doi: 10.12737/2073-0462-2022-77-82.

25. Шаваров С.Ю., Кругликов Н.А. Всхожесть семян укропа после барообработки // Тезисы докладов XXII Всероссийской школы-семинаров по проблемам физики конденсированного состояния вещества памяти М.И. Куркина (СПФКС-22). Екатеринбург: ИФМ УрО РАН, 2022. С. 292.

26. Теоретическое обоснование минимальной высоты падения сферической зерновки в раствор протравливателя / В. А. Сысуев, В. Е. Саитов, В. Г. Фарафонов и др. // Вестник Казанского государственного аграрного университета. 2020. Т. 15. № 2(58). С. 125-132. doi: 10.12737/2073-0462-2020-125-132.

27. Сабиров Р. Ф., Валиев А. Р., Мухамадьяров Ф. Ф. Обоснование конструктивно-технологических параметров устройства для обработки семян биопрепаратами // Вестник Казанского государственного аграрного университета. 2021. Т. 16. № 3(63). С. 84-89. doi: 10.12737/2073-0462-2021-84-89.

Сведения об авторах:
Максимов Иван Иванович – доктор технических наук, профессор кафедры транспортно-технологических машин и комплексов, e-mail: maksimov48@inbox.ru
Чувашский государственный аграрный университет, г. Чебоксары, Россия
Калимуллин Марат Назипович – доктор технических наук, доцент кафедры эксплуатации и ремонта машин, e-mail: marat-kmn@yandex.ru
Казанский государственный аграрный университет, г. Казань, Россия
Алексеев Евгений Петрович – кандидат технических наук, доцент кафедры транспортно-технологических машин и комплексов, e-mail: zhenia_alex@mail.ru
Чувашский государственный аграрный университет, г. Чебоксары, Россия
Васильев Алексей Анатольевич – кандидат технических наук, доцент кафедры технического обслуживания, организации перевозок и управления на транспорте, e-mail: alexei.21@mail.ru
Нижегородский государственный инженерно-экономический университет, г. Княгинино, Россия
Максимов Никита Владимирович – студент магистратуры, e-mail: w.nik213@yandex.ru
Чувашский государственный аграрный университет, г. Чебоксары, Россия

DETERMINATION OF BIFURCATION POINTS IN THE FUNCTIONING OF "SOIL-PLANT–AIR" SYSTEM

I. I. Maksimov, M. N.Kalimullin, E. P. Alekseev, A. A. Vasilev, N. V. Maksimov

Abstract. To date, a number of mathematical models of plant growth, developed by domestic and foreign scientists, are known. However, the issues of determining the bifurcation points that arise during the functioning of "soil-plant-air" system have not been sufficiently considered. In relation to the issues considered in the article, the bifurcation point is a critical state of the "plant" subsystem, at which it becomes unstable with respect to fluctuations in natural and climatic conditions (drought, frost, prolonged rains, etc.) and there is uncertainty in the development of plants (further growth or their death), as well as the intensive growth of plants as a result of the corresponding technological operations. For control and operational management of the formation of agricultural crops, it is desirable to know the bifurcation points determined by the biological time of plant growth and extreme weather situations. Therefore, the main goal of research is the analytical determination of bifurcation points observed during the vegetation of plants. The "plant" subsystem at the bifurcation point can be simultaneously in two or more states. As a result of the analysis of the obtained analytical dependences of various possible states of "soil-plant-air" system, it is proposed to subdivide bifurcations into negative and positive ones. A method has been obtained for determining bifurcation points during the functioning of "soil-plant-air" system. Under natural and climatic conditions, critical situations can arise with insufficient incoming substances to "soil-plant-air" system, such as light supply, moisture supply, heat supply, food supply and gas supply of plants. As a result of analytical studies, bifurcation points were determined in "soil-plant-air" system, depending on the radiation balance (R) formed on the underlying surface, slopes of different exposure and steepness, and coefficients characterizing light, moisture, heat, food and gas supply plants.

Key words: bifurcation, bifurcation points, plant growth.

References

1. Zhuravleva VV. [Mathematical models of regulation processes in plant physiology]. Izvestiya Altaiskogo gosudarstvennogo universiteta. 2008; 1 (57). 43-57 p.
2. Bessonov N, Volpert V. Dynamical models of plant growth. Mathematics and Mathematical modeling. [Internet]. Mathematics subject classification. 2000; 63 p. [cited 2023, April 21]. Available from: http://math.univ-lyon1.fr/~volpert/plant.pdf.
3. Marasco A., Giannino F. Modelling competitive interactions and plant-soil feedback in vegetation dynamics. Ricerche di Matematica. 2020; 69(1). [cited 2023, April 21]. Available from: https://link.springer.com/article/10.1007/s11587-020-00497-6. doi: 10.1007/s11587-020-00497-6.
4. Smithers ET, Luo J, Dyson RJ. Mathematical principles and models of plant growth mechanics: from cell wall dynamics to tissue morphogenesis. Journal of Experimental Botany. 2019; Vol.70. 14. 3587-3600 p. doi: 10.1093/jxb/erz253.
5. Feller C, Favre P, Janka A. Mathematical modeling of the dynamics of shoot-root interactions and resource partitioning in plant growth. [Internet]. Plos one. 2015; 10(7). [cited 2023, April 21]. Available from: https://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0127905. doi: 10.1371/journal.pone.0127905.
6. Arnol'd VI. Teoriya katastrof. [Theory of catastrophes]. Moscow: Nauka. 1990; 128 p.
7. Prigogine I, Wiame JM. Biologie et thermodynamique des phenomenes irreversibles. Experientia. 1946; Vol.2. 11. 451-453 p.
8. Prigozhin I, Kondepudi D. Sovremennaya termodinamika. Ot teplovykh dvigatelei do dissipativnykh struktur. [Modern thermodynamics. From heat engines to dissipative structures]. Moscow: Mir. 2002; 461 p.
9. Rozen R. Printsip optimal'nosti v biologii. The principle of optimality in biology M.: Mir, 1969. 215 p.
10. Kaur D. Bifurcation induced by delay parameter in plant growth dynamics. [Internet]. J. Phys.: Conf. Ser. 2022. [cited 2023, April 21]. Available from: https://www.iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/2267/1/012031. doi: 10.1088/1742-6596/2267/1/012031
11. Poluektov RA, Smolyar EI, Terleev VV. Modeli produktsionnogo protsessa sel'skokhozyaistvennykh kul'tur. [Models of the production process of agricultural crops]. SPb.: izd-vo S-Peterb. un-ta. 2006; 396 p.
12. Poluektov RA, Fintushal SM, Oparina IV. Agrotool - a system for crop simulation. Archives of Agronomy and Soil Science. 2002; Vol.48(6). 609-635 p.
13. Maksimov I, Apaseev A, Maksimov V. Towards a mathematical model of plant growth. [Internet]. IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, Cheboksary. 2021; [cited 2023, April 21]. Available from: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1755-1315/935/1/012031/pdf. doi: 10.1088/1755-1315/935/1/012031.
14. Maksimov II, Maksimov VI, Vasil'ev SA. Funktsionirovanie sistemy "Rastenie-pochva-vozdukh". Energosberegayushchie agrotekhnologii i tekhnika dlya severnogo zemledeliya i zhivotnovodstva: monografiya. [Functioning of "Plant-soil-air" system. Energy-saving agricultural technologies and equipment for northern agriculture and animal husbandry: monograph]. pod obshchey redaktsiey V.A.Sysueva. Kirov: OOO "Kirovskaya oblastnaya tipografiya". 2018; 54-62 p.

15. Alekseev VV, Maksimov II, Semenov MV. [Application of Fuzzy Logic elements in the assessment of moisture supply in the plant-soil-air system]. Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2018; Vol.13. 2(49). 62-66 p. doi: 10.12737/article_5b3504cd1487c7.23114959.

16. Ross YuK. [To the mathematical description of plant growth]. Doklady Akademii nauk SSSR. 1966; Vol.171. 2. 481-483 p.

17. Vasil'ev SA, Maksimov II, Petrov AA. [Substantiation of control parameters for the underlying surface of agrolandscapes of sloping lands]. Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2018; Vol.13. 1(48). 108-112 p. doi: 10.12737/article_5afafe45b3a5e9.59496141.

18. Nerpin SV, Chudnovskiy AF. Energo- i massoobmen v sisteme “Rastenie-pochva-vozdukh”. [Energy and mass transfer in the “Plant-soil-air” system]. Leningrad: Gidrometeoizdat. 1975; 358 p.

19. Serzhanova AR, Gilyazov MYu, Shaykhutdinov FSh. [Changes in the thermal resources of the growing season and spring wheat productivity in the conditions of Middle Volga]. Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2023; Vol.18. 1(69). 38-44 p. doi: 10.12737/2073-0462-2023-38-44.

20. Shashkarov LG, Mefod'ev GA, Balykin AA. [Sowing density, field germination and yield structure of spring wheat depending on the variety and presowing seed treatment]. Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2019; Vol.14. S4-1(55). 132-136 p. doi: 10.12737/2073-0462-2020-132-136.

21. Filippova EA, Bannikova NYu, Mal'tseva LT. [Analysis of weather conditions in connection with winter wheat cultivation in the forest-steppe zone of the Trans-Urals]. Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2022; Vol.17. 1(65). 32-37 p. doi: 10.12737/2073-0462-2022-32-37.

22. Sabirov RF, Valiev AR, Safin RI. [Prediction of the influence of physical factors on the viability of microorganisms of biological products for plant protection]. Tekhnika i oborudovanie dlya sela. 2020; 4 (274). 29-33 p. doi: 10.33267/2072-9642-2020-4-29-32.

23. Shashkarov LG, Grigor'ev YaM, Samarkin AA. [Influence of tuber planting depth on the net productivity of photosynthesis of potato plants]. Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2018; Vol.13. 1(48). 33 p. doi: 10.12737/article_5afbffb4ccf610.58065722.

24. Sabirov RF, Valiev AR, Mukhamad'yarov FF. [Determination of dispersity of spraying the working solution of a biological product]. Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2022; Vol.17. 1(65). 77-82 p. doi: 10.12737/2073-0462-2022-77-82.

25. Shavarov SYu, Kruglikov NA. [Germination of dill seeds after pressure treatment]. Tezisy dokladov XXII Vserossiiskoy shkoly-seminarov po problemam fiziki kondensirovannogo sostoyaniya veshchestva pamyati M.I.Kurkina (SPFKS-22). Ekaterinburg: IFM UrO RAN. 2022; 292 p.

26. Sysuev VA, Saitov VE, Farafonov VG. [Theoretical substantiation of the minimum height of the fall of a spherical grain into the dressing solution]. Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2020; Vol.15. 2(58). 125-132 p. doi: 10.12737/2073-0462-2020-125-132.

27. Sabirov RF, Valiev AR, Mukhamad'yarov FF. [Substantiation of the design and technological parameters of a device for seed treatment with biological preparations]. Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2021; Vol.16. 3(63). 84-89 p. doi: 10.12737/2073-0462-2021-84-89.

Authors:

Maksimov Ivan Ivanovich - Doctor of Technical sciences, Professor of Transport and technological machines and complexes Department, e-mail: maksimov48@inbox.ru

Chuvash State Agrarian University, Cheboksary, Russia

Kalimullin Marat Nazipovich - Doctor of Technical sciences, Associate Professor of the Department of Operation and Repair of Machines, e-mail: marat-kmn@yandex.ru

Kazan State Agrarian University, Kazan, Russia

Alekseev Evgeniy Petrovich – Ph.D. of Technical sciences, Associate Professor of Transport and Technological Machines and Complexes Department, e-mail: zhenia_alex@mail.ru

Chuvash State Agrarian University, Cheboksary, Russia

Vasiliev Aleksey Anatolyevich – Ph.D. of Technical sciences, Associate Professor of Department of Maintenance, Organization of Transportation and Transport Management, e-mail: alexei.21@mail.ru

Nizhny Novgorod State Engineering and Economic University, Knyaginino, Russia

Maksimov Nikita Vladimirovich – Master’s student, e-mail: w.nik213@yandex.ru

Chuvash State Agrarian University, Cheboksary, Russia.